OPPGAVER FRA "RUNDT OMKING" OG IMO.

Oppgave 1

To sirkler skjærer hverandre i punktene M og N. Sirklene har en fellestangent med P og Q som tangeringspunkter.

Vis at trekantene PMN og QMN har like store arealer.(Storbritannia)

Oppgave 2

Vis at ikke alle røttene i $x^5 + ax^4 + bx^3 + \ldots + e = 0$ kan være reelle dersom $2a^2 < 5b$. (USA)

Oppgave 3

La $a,b,c > 0$ slik at(s.a.) $abc = 1$. Vis at da gjelder følgende ulikhet

$$\left(a^3(b+c)\right)^{-1} + \left(b^3(c+a)\right)^{-1} + \left(c^3(a+b)\right)^{-1} \geq \frac{3}{2} \quad \text{(IMO-1995)}$$

Oppgave 4

La x, y og z være positive reelle tall (s.a.) $xyz = 32$. Bestem minsteverdien til $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$ (uten kjennskap til Lagrangemultiplikator, mens derimot AM-GM ulikheten er kjent for alle) (Irland)

Oppgave 5

En funksjon er definert på $[0,1]$ og tilfredsstiller betingelsene

(i): $f(0) = f(1) = 0$

(ii): $f\left(1/2(a+b)\right) \leq f(a) + f(b)$

Vis at $f(x) = 0$ har uendelig mange nullpunkter.

(Kjenner *dere* til en funksjon som oppfyller disse to kravene?) (Serbia)

Oppgave 6

Bestem alle reelle tall x s.a. $x^n + x^{-n}$ er et helt tall for alle naturlige tall n.(Nordisk)

Oppgave 7

La D være skjæringspunktet mellom BC og halveringslinja til vinkel A i trekant ABC. Vis at $AB \cdot AC > AD^2$. (Estland)

Oppgave 8

La ABCD være et rektangel s.a. BC = 2AB. La E være midtpunktet på BC og P et indre punkt på AD. La videre F og G være fotpunktet for normalene fra A på BP og fra D på CP hhvis. Vis at E,F,G og P er konsykliske(ligger på samme sirkel) (Baltic Way 2003).

Oppgave 9

Vis at for alle naturlige tall n er produktet $(4-2/1)(4-2/2)(4-2/3)\ldots(4-2/n)$ også et naturlig tall(Hellas)

Oppgave 10

ABC er spissvinklet med D som fotpunktet fra A på BC. Sirkelen S tangerer BC i D, skjærer linjestykket AB i M og N og skjærer linjestykket AC i P og Q.

Vis at AB(AM + AN) = AC(AP + AQ). (Tyskland)

Oppgave 11

ABCD er en syklisk firkant(dvs. alle hjørner ligger på en sirkel). En sirkel har sentrum på siden AB og tangerer de tre andre sider i firkanten.

Vis at AD + BC = AB. (IMO 1985)

Oppgave 12

ABCD er en rombe. Punktene E,F,G,H ligger på AB,BC,CD,DA s.a EF og GH tangerer innsirkelen til romben Vis at EH || GF (Brasil).

Oppgave 13

P er et indre punkt i ABC med avstanden p,q,r til sidene BC,CA og AB, hhvis.

Vis at $(2R)^{1/2}\left(p^{1/2}+q^{1/2}+r^{1/2}\right)\le\left(a^2+b^2+c^2\right)^{1/2}$ (Mange land).(Her er R omradien i trekant ABC(standardnotasjon i geometri))(Når har vi likhet i denne ulikheten?)

Oppgave 14

La $a,b,c>0$ s.a. $abc=1$.

Vis at $(a-1+1/b)(b-1+1/c)(c-1+1/a)\le 1$(IMO 2000)

Oppgave 15

I trekanten ABC er D midtpunktet på siden BC. Finn vinkel DAB når vinklene BDA og C er 45 og 30 grader hhvis.(Sør Afrika).

Oppgave 1

P er et indre punkt i ABC med avstanden p,q,r til sidene BC,CA og AB, hhvis.

Vis at $(2R)^{1/2}\left(p^{1/2}+q^{1/2}+r^{1/2}\right)\le\left(a^2+b^2+c^2\right)^{1/2}$ (Mange land).(Her er R omradien i trekant ABC(standardnotasjon i geometri))(Når har vi likhet i denne ulikheten?)

Oppgave 2

La $a,b,c>0$ s.a. $abc=1$.

Vis at $(a-1+1/b)(b-1+1/c)(c-1+1/a)\le 1$ (IMO 2000)

Oppgave 3

I trekanten ABC er D midtpunktet på siden BC. Finn vinkel DAB når vinklene BDA og C er 45 og 30 grader hhvis.(Sør Afrika).

Oppgave 4

ABCD er en syklisk firkant(dvs. alle hjørner ligger på en sirkel). En sirkel har sentrum på siden AB og tangerer de tre andre sider i firkanten.

Vis at AD + BC = AB. (IMO 1985)

Oppgave 5

ABCD er en rombe. Punktene E,F,G,H ligger på AB,BC,CD,DA s.a EF og GH tangerer innsirkelen til romben Vis at EH || GF (Brasil).

Oppgave 6

La a,b,c > 0 slik at(s.a.) abc = 1. Vis at da gjelder følgende ulikhet

$$\left(a^3(b+c)\right)^{-1}+\left(b^3(c+a)\right)^{-1}+\left(c^3(a+b)\right)^{-1}\ge\frac{3}{2}$$ (IMO-1995)

Oppgave 7

La ABCD være et rektangel s.a. BC = 2AB. La E være midtpunktet på BC og P et indre punkt på AD. La videre F og G være fotpunktet for normalene fra A på BP og fra D på CP hhvis. Vis at E,F,G og P er konsykliske(ligger på samme sirkel) (Baltic Way 2003).

Oppgave 8

La D være skjæringspunktet mellom BC og halveringslinja til vinkel A i trekant ABC. Vis at $AB\cdot AC>AD^2$. (Estland)

Oppgave 9

ABC er spissvinklet med D som fotpunktet fra A på BC. Sirkelen S tangerer BC i D, skjærer linjestykket AB i M og N og skjærer linjestykket AC i P og Q.

Vis at AB(AM + AN) = AC(AP + AQ). (Tyskland)

Oppgave 10

En funksjon er definert på $[0,1]$ og tilfredsstiller betingelsene

(i): $f(0) = f(1) = 0$

(ii): $f(1/2(a+b)) \leq f(a) + f(b)$

Vis at $f(x) = 0$ har uendelig mange nullpunkter.

(Kjenner *dere* til en funksjon som oppfyller disse to kravene?) (Serbia)

Oppgave 11

Vis at for alle naturlige tall n er produktet $(4-2/1)(4-2/2)(4-2/3)\ldots(4-2/n)$ også et naturlig tall(Hellas)

Oppgave 12

La x, y og z være positive reelle tall (s.a.) $xyz = 32$. Bestem minsteverdien til $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$ (uten kjennskap til Lagrangemultiplikator, mens derimot AM-GM ulikheten er kjent for alle) (Irland)

Oppgave 13

Bestem alle reelle tall x s.a. $x^n + x^{-n}$ er et helt tall for alle naturlige tall n.(Nordisk)

Oppgave 14

Vis at ikke alle røttene i $x^5 + ax^4 + bx^3 + \ldots + e = 0$ kan være reelle dersom $2a^2 < 5b$. (USA)

Oppgave 15

To sirkler skjærer hverandre i punktene M og N. Sirklene har en fellestangent med P og Q som tangeringspunkter.

Vis at trekantene PMN og QMN har like store arealer.(Storbritannia)