Algoritme for å finne alle undermoduler av en gitt modul

Oppdragsgiver for prosjektet er Øyvind Solberg, IMF, NTNU.

Bakgrunn. Generelt er det å finne alle undermoduler av en gitt modul ikke nødvendigvis en gjennomførbar oppgave. Men hvis vi restringerer oss til endeligdimensjonale moduler over endeligdimensjonale algebraer over endelige kropper, blir problemet et endelig problem. I mange tilfeller er det et stort problem, men det er et endelig problem. Hvorfor kan man være interessert å gjøre noe slikt? Det finnes formodninger (som for eksempel, *Finitistic dimension conjective*), som er åpne for endeligdimensjonale algebraer, hvor en mulig strategi for å få en bedre forståelse for problemet, er å undersøke en mengde eksempler.

I representasjonsteorien for endeligdimensjonale algebraer er kvotienter av veialgebraer kQ/I viktige eksempler, der k er en kropp, Q er et endelig quiver (rettet graf) og I er et tillatelig ideal i veialgebraen kQ. Et tillatelig ideal I er et ideal i kQ, slik at for et positivt heltall $t \geqslant 2$ så er $J^t \subseteq I \subseteq J^2$, hvor J er idealet i kQ generert av alle pilene i Q. En strategi for å undersøke en rekke eksempler på en systematisk måte, ville være for et gitt quiver Q og en endelig kropp k, finne alle tillatelige ideal I med egenskapen $J^t \subseteq I \subseteq J^2$ for en gitt $t \geqslant 2$. Dette svarer til å finne all undermodulene av J^2/J^t som en kQ/J^t-kQ/J^t-bimodul. Med andre ord for $\Lambda = kQ/J^t$, å finne all undermodulene av J^2/J^t som en $\Lambda^{\mathrm{env}} = \Lambda^{\mathrm{op}} \otimes_k \Lambda$-undermodul. Algebraen Λ^{env} er igjen en tillatelig kvotient av en veialgebra, slik at hvis vi har en generell algoritme for å finne alle undermoduler av en gitt endeligdimensjonal modul over en endeligdimensjonal kvotient av en veialgebra, vi vil være i stand til å løse dette problemet.

Siden "Finitistic dimension conjecture" er en sentral formodning for endeligdimensjonale algebraer, er det viktig for programvarepakken QPA (**Q**uivers and **P**ath **A**lgebras) å ha algoritmer for å angripe dem. Derfor kan det være en tilleggsoppgave å implementere den algoritmen som en kommer fram til. Programmeringsspråket for QPA er GAP (`www.gap-system.org`).

Problem. Utvikle en algoritme for å finne alle undermoduler av en gitt modul M over en endeligdimensjonal algebra gitt ved et quiver og tillatelige relasjoner over en endelig kropp.

Forkunnskaper. Denne oppgaven forutsetter følgende: MA2201/TMA4150, MA3201, og MA3203. Den nødvendige bakgrunnen for prosjektet kan en finne i Assem, Simson, Skowronski: Elements of the representation theory of associative aglebras eller Auslander, Reiten, Smalø: Representation theory of artin algebras. For tilleggsdelen trenges det erfaring i programmering.

Opplæring. Den nødvendige bakgrunnen ut over kursene over vil bli gitt gjennom veiledning, og for tilleggsdelen vil det bli gitt opplæring i programmeringsspråket GAP.