Prosjekt. Neharis teorem for multiplikative Hankel-matriser.

Veiledere. Ole Fredrik Brevig og Karl-Mikael Perfekt.

Bakgrunn. Matrisen $M = (m_{i,j})$ kalles en *Hankel-matrise* dersom koordinatene oppfyller $m_{i,j} = m_{k,l}$ når $i + j = k + l$. Eksempelvis har en 4×4 Hankel-matrise formen

$$M = \begin{pmatrix} \varrho_0 & \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 & \varrho_4 \\ \varrho_2 & \varrho_3 & \varrho_4 & \varrho_5 \\ \varrho_3 & \varrho_4 & \varrho_5 & \varrho_6 \end{pmatrix}.$$

Neharis teorem [3] (og lignende resultater) beskriver hvordan spørsmål om matrisen M kan besvares ved å studere det komplekse polynomet

$$P(z) = \varrho_0 + \varrho_1 z + \varrho_2 z^2 + \cdots + \varrho_6 z^6.$$

Matrisen $M = (m_{i,j})$ kalles en *multiplikativ Hankel-matrise* dersom $m_{i,j} = m_{k,l}$ når $i \cdot j = k \cdot l$. På samme måte som multiplikasjon av heltall svarer til addisjon av primtallspotenser, svarer multiplikative Hankel-matriser til en kombinasjon av flere ordinære Hankel-matriser. (Dette gir også en kobling mellom multiplikative Hankel-matriser og Dirichlet-rekker/tallteori.)

Det ble nylig bevist at et Nehari-type teorem ikke er sant for alle multiplikative Hankel-matriser [4]. Allikevel kan man bevise Nehari-type teoremer for matriser i *Schatten-klassene* S_p. Helson [2] beviste at Neharis teorem er sant for S_p når $1 \leq p \leq 2$, og i [1] konstruerte vi et eksempel som viser at Nehari-type teoremer ikke finnes for S_p når $p > (1 - \log \pi / \log 4)^{-1} \approx 5.74$.

Problem. Forbedre 5.74. Metoden i [1] er lett å anvende, og innebærer kort oppsummert å regne ut et uttrykk som bestående av to polynomer P og Q, som kan velges fritt. Dersom uttrykket er mindre enn 1, kan polynomene "utvides" på to forskjellige måter for å oppnå et moteksempel. Polynomene $P(z) = Q(z) = z$ benyttes i [1], men det er mye som tyder på at for å forbedre 5.74 må man betrakte flervariabel-polynomer.

Spesifikasjon. I en kort teoretisk del må metoden fra [1] tilpasses for å kunne brukes på flervariabel-polynomer. Det overnevnte uttrykket inneholder et integral av absoluttverdien til $P(z)$ og singulærverdiene til en matrise, og begge må beregnes numerisk. Etter teoretisk oppsett og implementasjon gjelder det å finne polynomer som gir en bedre p-verdi enn $P(z) = Q(z) = z$. Dette kan gjøres mer eller mindre tilfeldig, men vi har allerede noen idéer om hvordan P og Q (ikke) bør velges.

Forkunnskaper. Matematikk 1, 2, 3 og 4K. Emner som Lineære metoder og Funksjonalanalyse kan være nyttig, men er absolutt ikke nødvendig. Det er viktig med gode programmeringsferdigheter.

Arbeidsmengde. 50–100 timer. Prosjektet egner seg godt for samarbeid mellom to studenter.

Referanser

1. Ole Fredrik Brevig and Karl-Mikael Perfekt, *Failure of Nehari's theorem for multiplicative Hankel forms in Schatten*, Studia Math. **228** (2015), no. 2, 101–108.
2. Henry Helson, *Hankel forms and sums of random variables*, Studia Math. **176** (2006), no. 1, 85–92.
3. Zeev Nehari, *On bounded bilinear forms*, Ann. of Math. (2) **65** (1957), 153–162.
4. Joaquim Ortega-Cerdà and Kristian Seip, *A lower bound in Nehari's theorem on the polydisc*, J. Anal. Math. **118** (2012), no. 1, 339–342.