StudForsk

Bølger I: form og regularitet

Sammendrag. Dette er et 50-timers studentprosjekt i matematisk teori for vannbølger. Vi begynner med Korteweg-de Vries likning, en modell som beskriver lange bølger og bølger på grunt vann. Hvordan kan en likning brukes til å fastsette egenskaper til løsninger, selv uten å kjenne løsningene eksplisitt? Hvorfor er cos og sin grunnleggende for alle periodiske bølger, og hvordan dukker de opp i løsningene til bølgelikninger? Prosjektet egner seg for alle som har tatt tilsvarende Matematikk 2.

Bakgrunn. Korteweg-de Vries likning,

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 u + 3\frac{\partial}{\partial x}u^2 = 0,$$

beskriver vannbølger når bølgelengden er stor i forhold til vanndybden. Gustav de Vries og Diederik Korteweg, likesom Joseph Boussinesq, fant denne likningen som en modell for vannbølger på slutten av 1800-tallet. Modellen var ikke mye studert de nærmeste tiårene, men fikk et enormt oppsving etter studier på 60-tallet som fant at denne likningen tillater såkalte solitoner – bølger av permament form og hastighet som oppfører seg som partikler når de møter og overtar hverandre. Solitonforskningen har revolusjonert store deler av matematikken, fysikken og biologien, og ledet til en intens forskning på ikke-lineære differensiallikninger.

Oppgave. For en bølge med permanent form og hastighet (slik de du ser ute til havs), reduseres KdV til en ordinær differensiallikning i $X = x - ct$, hvor c er bølgehastigheten.

Oppgave 1: Finn likningen for KdV i den nye variabelen X, og vis at enhver to ganger deriverbar løsning til denne også er uendelig mange ganger deriverbar.

Oppgave 2: For KdV er det kjent at permanente (reisende) bølger kan uttrykkes ved hjelp av såkalte elliptiske integraler. Disse er imildertid kompliserte, og det kan være en fordel å forstå bølgene på en mer grunnleggende måte. Utvikl bølgehastigheten c og løsningen u i analytiske (Taylor-) rekker i en liten parameter, for å så bestemme hvordan små periodiske bølger ser ut. Er tilsvarende metode mulig for ikke-periodiske løsninger?

Oppgave 3: Vis ved hjelp av Opppgave 2 at de små bølgeløsningene til KdV er strengt monotone fra sin ene bølgedal til sin ene bølgetopp i én minimal periode.

Arbeidsgang. Vi møtes med jevne mellomrom for å diskutere kilder, gå igjennom utregninger og utveksle idéer. Ved behov finnes yterligere en gruppe med fire ph.d.-studenter og en Postdoc som kan hjelpe.

Førkunnskapskrav. Ingen utover tilsvarende Matematikk 1 og 2 (eller mindre, dersom man forstår likningen ovenfor). Dersom du ikke har kjennskap til Fourier-rekker og ønsker gå litt mer i dybden, er det mulig å utvide prosjektet til 100 timer.

Kontakt: mats.ehrnstrom@math.ntnu.no (1146 i Sentralbygg II)