SIF5005 Matematikk 2, våren 2003

Auditorieøving 11

Uke 14

Oppgave 1 Avgjør om vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y)$ er konservativt, og beregn integralet $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ når

a) $\mathbf{F}(x,y) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ og C er parabeldelen $y = x^2$ for $|x| \leq 1$ i økende x–retning.

b) $\mathbf{F}(x,y) = x\sin y\,\mathbf{i} + x\cos y\,\mathbf{j}$ og C er linjestykket $y = x$ for $0 \leq x \leq \pi/2$ orientert i økende x–retning.

Oppgave 2 Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y) = (2x-y)\mathbf{i} + (2y-x)\mathbf{j}$ er konservativt og finn en potensialfunksjon til $\mathbf{F}$. Bestem integralet $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ når C er sirkelen med sentrum i $(2,-1)$ og radius 3 og positiv omløpsretning.

Oppgave 3 Bruk Greens teorem til å beregne $\oint_C (e^x \sin y\,\mathbf{i} + e^x\cos y\,\mathbf{j})\cdot\mathbf{T}\,ds$ når C er kurven $r = 2\sqrt{\cos\theta}$ for $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ i retning økende θ.

Oppgave 4 Beregn integralet $\oint_C (e^x - y)dx + (\cos x - xy)dy$ der C er randen til trekanten med hjørner i $(0,2)$, $(2,0)$ og $-2,0)$ tatt i positiv omløpsretning.

Oppgave 5 Bruk Greens teorem til å finne arealet innenfor astroiden $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t \quad \text{for } 0 \leq t \leq 2\pi$.

Oppgave 6 La $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2+y^2}$ for $(x,y) \in D$ der D er hele xy–planet unntatt origo.

a) Vis at $\text{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ i D.

b) Beregn $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ der C er sirkelen med sentrum i origo og radius $a > 0$ med positiv omløpsretning.

c) Forklar hvordan dette stemmer med Greens teorem.