SIF5005 Matematikk 2, våren 2003

Hjemmeøving 3

Veiledning og innlevering: uke 8.

Oppgave 1 Funksjonene f og g har

$$Q = \{(x, y, z) \big|\ |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$$

(en kube med sidelengde 2) som definisjonsområde, og er definert ved
$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ og $g(x, y, z) = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + 2$.

1. Hva er (den globale) maksimumsverdien for hver funksjon?
2. Hvor oppnås disse maksimumsverdiene?

Oppgave 2 For funksjonen f gitt over har vi at $f(1, 1, 1) = 3$, noe du lett kan regne ut selv. Bruk lineær tilnærming for å finne $f(0,9,\ 1,\ 0,9)$. Uten å regne ut den virkelige verdien, forventer du at den verdien du har regnet ut er for høy eller for lav? Hvorfor? Regn ut den virkelige verdien og sjekk svaret ditt.

Oppgave 3 En flue flyr i boksen Q beskrevet over. Temperaturen i boksen er gitt ved funksjonen $T(x, y, z)$. Fluen søker varme, og beveger seg alltid i den retningen varmen stiger mest. Farten til fluen i et punkt er proporsjonal med endringsraten til temperaturen i dette punktet, i retningen fluen beveger seg. Vi observerer fluen i området av boksen der z er positiv og der y er mindre enn $-1/2$. Vi ser her at farten til fluen i z-retningen (vertikalt) alltid er det dobbelte av farten horisontalt (parallelt med xy-planet). Under disse observasjonene la vi også merke til at hvis vi så på yz-planet fra positiv x retning så beveget fluen seg alltid mot venstre.

Vi vet at for hele boksen har vi

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y, z) = T(x, y, z) \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, z) = 2\sqrt{2}T(x, y, z).$$

1. Hva vet vi om $\frac{\partial T}{\partial y}$ i det området vi gjorde observasjonene våre?
2. Hva kan du si om fluens bevegelse i punktet $(0, 1/2, 1/2)$?

Oppgave 4 Funksjonen f er definert ved at $f(x, y, z)$ er løsningen w av

$$we^w = x^2 + y^2 + \tfrac{1}{4}z^2, \qquad w \geq 0.$$

Finn $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0)$.

Oppgave 5 En flate S er gitt ved $f(x,y,z) = 6$, der

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + x^2y + xy^2 - x - y.$$

1. Har $f(x,y,z)$ noen kritiske punkter på flaten S?
2. Finn en ligning som beskriver tangentplanet til S i punktet $(1,2,2)$.

Oppgave 6 Vi vil studere funksjonen

$$f(x,y) = -x^3 + x^2 + 3x - x^2y + \frac{1}{2}y^2.$$

1. Finn alle de kritiske punktene til f.
2. I hvilke av disse punktene har f et lokalt maksimum? Hva med lokale minima og sadelpunkter?
3. Skisser nivåkurvene til f i nærheten av hvert av de kritiske punktene. (For hvert kritisk punkt, bare tegn så nærme at du er forholdsvis langt fra de andre kritiske punktene.) Sett piler på hver nivåkurve som er normale på nivåkurvene og peker mot den nivåkurven som beskriver et høyere nivå.)
4. Hvordan stemmer svarene dine på de to foregående oppgavene overens?
5. Skisser nivåkurvene i området $|x| \leq 2$, $|y| \leq 2$.