SIF5005 Matematikk 2, våren 2003

Hjemmeøving 4

Veiledning og innlevering: Uke 10.

Oppgave 1 Sett opp integralet $\iint_R f(x,y)\,dA$ med riktige grenser og i begge integrasjonsrekkefølger når R er gitt som følger:

a) 1. Området avgrenset av kurvene $y = x^3$, $y = 2$ og $x = a > 2^{1/3}$.
   2. Området avgrenset av kurvene $y = x^3$, $y = 2$ og $x = a < 2^{1/3}$.

b) Området avgrenset av kurvene $y = \ln x$, $y = x^{-2}$, $x = 1$. (Her kan du bruke tallet b som er en løsning av ligningen $\ln x = x^{-2}$).

c) Området avgrenset av sirkelen med radius r og sentrum i origo.

d) Området mellom rektangelet med hjørner $(2,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ og $(2,-1)$ og rektangelet med hjørner $(3,2)$, $(-2,2)$, $(-2,-2)$ og $(3,-2)$.

e) Området avgrenset av kurvene $x = 2y^2 - 1$ og $x = 1 - 3y^2$.

Oppgave 2 Området R ligger i første oktant (dvs $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) og er begrenset av flatene $S_1 : y = \cos x$, $S_2 : z = \cos x$, av koordinatplanene og av $x \leq \pi/2$.

a) Lag en skisse av R ved å tegne S_1 og S_2 inn i samme koordinatsystem. Tegn også inn den delen av skjæringskurven mellom de to flatene som ligger i R.

b) Finn volumet av R.

Oppgave 3 La R være rektangelet med hjørner $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) og $(0,b)$ hvor $a, b \geq 0$ og $a + b = k$ hvor k er en positiv konstant. Finn a og b slik at integralet

$$\iint_R x + 2y\;dA$$

får maksimal verdi. Finn også denne maksimale verdien.

Oppgave 4

a) Anta at funksjonen $g(x, y, z)$ i punktet $(-1, 1, 1)$ har maksimal retningsderivert lik 6 og dette oppnås i retning mot punktet $(1, 2, 3)$. Finn den retningsderiverte i $(-1, 1, 1)$ i retning mot punktet $(-1, -3, -2)$.

b) Anta $z = f(x, y)$ definerer en flate i rommet med tangentplan i punktet $(1, -1, 3/2)$ gitt ved ligningen $4x + 2z = 7$. Finn den retningsderiverte til $f(x, y)$ i punktet $P = (1, -1)$ i retning $\mathbf{j}$. Finn også en enhetsvektor $\mathbf{u}$ slik at den retningsderiverte til $f(x, y)$ i punktet P i retning $\mathbf{u}$ er lik -1.

Oppgave 5 La kurven C være gitt ved ligningen

$$(*) \qquad 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4\sqrt{2}(x + y)\,.$$

a) Finn maksimums- og minimumspunktene til $f(x, y) = xy$ med definisjonsmengde C.

b) Et område R i rommet er avgrenset av sylinderen over C (dvs at $(*)$ oppfattes som en ligning for punkter i rommet) og planene gitt av $z = 5$ og $z = 12$. Finn maksimums- og minimumspunktene til $F(x, y, z) = xye^z$ med definisjonsmengde R.

Oppgave 6 I en prosess avhenger to størrelser F og G av tre innsatsfaktorer med størrelser x, y og z (alle > 0). Etter skalering er $F(x, y, z) = xyz$ og $G(x, y, z) = k\sqrt{xy}z^2$ for en konstant $k > 0$. Pr. i dag benyttes innsatsfaktorpunktet $P_0 = (9, 16,\ 3{,}2)$. Vi vil undersøke om vi kan endre størrelsene på innsatsfaktorene (dvs endre P_0) uten å endre størrelsene F og G.

a) Finn alle retninger $\mathbf{v}$ (en vektor) slik at hvis innsatsfaktorpunktet P_0 endres moderat i retning $\mathbf{v}$ vil F og G begge forbli (tilnærmet) uendret.

b) Finn et punkt P_1 med avstand 5 til P_0 slik at innsatsfaktorpunktet kan flyttes langs en kurve fra P_0 til P_1 uten at F og G endrer seg langs kurven.