

# Hjemmeøving 5

Veiledning og innlevering: uke 13.

Bortsett fra de to siste oppgavene, er dette tidligere eksamensoppgaver der dataene er noe endret.

**Oppgave 1** Et legeme  $T$  med konstant massetetthet 1 og grunnflate i  $xy$ -planet er begrenset av flatene

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

der  $a$  er en positiv konstant. Bestem  $a$  slik at tyngdepunktet til  $T$  blir  $(0,0,3)$ .

**Oppgave 2** Legemet  $T$  er begrenset av flatene  $z = 2 - x^2 - y^2$  og  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , og har konstant massetetthet lik  $3/5$ .

- a) Skisser  $T$  og vis at massen til  $T$  er  $\pi/2$ . Finn tyngdepunktet til  $T$ .
- b) Anta nå at  $T$  flyter i et vannbad med symmetriaksen ( $z$ -aksen i **a**)) vertikalt og den butte enden ned. Hvor dypt flyter  $T$  i vannet?

Hint: Etter Arkimedes' lov er massen av den vannmengden  $T$  fortrenger lik massen av  $T$ . Massetettheten for vann kan du regne som 1 kg / liter.

### Oppgave 3

- a) Beregn volumet av legemet avgrenset av flatene

$$z = 2x^2 + y^2 \quad \text{og} \quad z = 2 - y^2.$$

- b) Et insekt beveger seg (mot urviseren sett ovenfra) langs skjæringskurven mellom de to flatene. Anta at temperaturen i punktet  $(x, y, z)$  er gitt ved funksjonen

$$T(x, y, z) = 10 + (x^2 + y^2 + 2z^2)/3.$$

Hvor stor temperaturendring per lengdeenhet langs skjæringskurven opplever insektet i punktet  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 3/2)$ ?

**Oppgave 4.** Et legeme  $T$  har følgende beskrivelse i kulekoordinater:

$$0 \leq \rho \leq \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

Finn massen til  $T$  når massetettheten  $\delta$  er gitt ved  $\delta = \cos \theta$  i kulekoordinater. Bestem også  $z$ -koordinaten til tyngdepunktet.

**Oppgave 5.** En modell av en idrettshall er avgrenset av flatene  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = 1$  og  $z = 2 - xy$ .

- a) Beregn volumet av modellen.
- b) Overflaten til modellen består av tre flater, bunnen, taket og sideveggen. Beregn arealet av hver av de tre flatene.

**Oppgave 6.** Finn middelveidien

$$\bar{f} = \frac{1}{V} \iiint_T f(x, y, z) dV$$

for avstanden  $f(x, y, z) = |z|$  til  $xy$ -planet, for punktene i området avgrenset av de tre koordinatplanene og planet  $x + 2y + z = 6$ .

**Oppgave 7.** En wire med konstant massetetthet  $k$  har formen

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t \quad \text{for } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Finn treghetsmomentet for wiren med hensyn på  $z$ -aksen.