SIF5005 MATEMATIKK 2 VÅR 2003

Løsningsforslag Hjemmeøving 5

Oppgave 1. Ser at massen fordeler seg symetrisk om z-aksen, derfor vil tyngdepunktet ligge på z-aksen. Det eneste vi da trenger å regne ut er $\tilde{z}$.

$$\overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_V z\delta dV = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{r^2} zrdzdrd\theta = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{2}r^5 drd\theta = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\frac{a^6}{12}d\theta = \frac{1}{m}\frac{a^6\pi}{6}$$

$$m = \delta V = V = \iiint_V dV = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{r^2} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^a r^3 drd\theta = \int_0^{2\pi}\frac{a^4}{4}d\theta = \frac{\pi a^4}{2}$$

$$\overline{z} = \frac{2}{\pi a^4}\frac{a^6\pi}{6} = \frac{a^2}{3}$$

For at tyngdepunktet skal bli $(0,0,3)$ må vi da ha at $\frac{a^2}{3} = 3$, altså at $a^2 = 9$. Siden a er en positivt konstant får vi da at $a = 3$.

Oppgave 2.

a) Vi ser at legemet er symetrisk om z-aksen, og derfor vil tyngdepunktet ligge på z-aksen. Siden massetettheten er konstant $\delta = 3/5$, vil massen være $m = \frac{3}{5}V$, hvor V er volumet av legemet. Siden vi trenger volumet for å finne tyngdepunktet, starter vi med å regne ut dette. Først trenger vi å vite hvor flatene skjærer hverandre:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$2 - r^2 = r$$
$$r^2 + r - 2 = 0$$

Denne lignigen gir $r = 1$ eller $r = -2$. Siden r er en avstand må den være positiv, derfor har vi at $r = 1$. Vi kan da finne volumet:

$$V = \iiint_V dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{2-r^2} rdzdrd\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1(-r^3 - r^2 + 2r)drd\theta = \int_0^{2\pi}\frac{5}{12}d\theta = \frac{5\pi}{6}$$

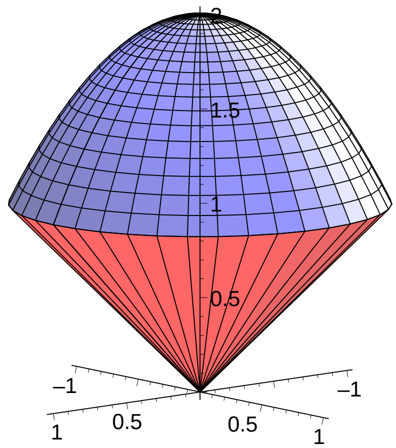
Altså er massen $m = \delta V = \frac{3}{5}V = \frac{3}{5}\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

La oss nå finne tyngdepunktet. Siden det ligger på z-aksen er alt vi trenger å finne $\overline{z}$.

$$\overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_V z\delta dV = \frac{\delta}{\delta V}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{2-r^2} zrdzdrd\theta =$$

$$\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (\frac{1}{2}r^5 - \frac{5}{2}r^3 + 2r)drd\theta = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\frac{11}{24}d\theta = \frac{1}{V}\frac{11\pi}{12} = \frac{6}{5\pi}\frac{11\pi}{12} = \frac{11}{10}$$

Altså er tyngdepunktet $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (0, 0, 11/10)$.



b) Siden legemet har masse $\pi/2$ må det fortrenge vann med et volum på $\pi/2$, altså delen av legemet som er under vann må ha et volum på $\pi/2$. Da må volumet av den delen av legemet som er over vann ha et volum på $5\pi/6 - \pi/2 = \pi/3$.

Vi kontrollerer først om noe av "kjegledelen" av legemet stikker under vann. Den spisse enden er en sirkulær kjegle med grunnflateareal $\pi 1^2 = \pi$ og høyde 1. Den har altså volum $\frac{1}{3}\pi 1 = \frac{\pi}{3}$. Dette er likt volumet av den delen av legemet som stikker opp vannet, altså stikker kjegledelen, og kun kjegledelen, opp av vannet.

Flatene krysser hverandre i sirkelen $r = \sqrt{x^2+y^2} = 1$, noe som gir høyden av kjegledelen $z = \sqrt{x^2+y^2} = 1$. Siden hele legemet har en høyde på 2 vil da legemet stikke $2 - 1 = 1$ under vannflata.

Oppgave 3.

a) Først ser vi hvor flatene skjærer hverandre:

$$2x^2 + y^2 = 2 - y^2$$

$$2x^2 + 2y^2 = 2$$

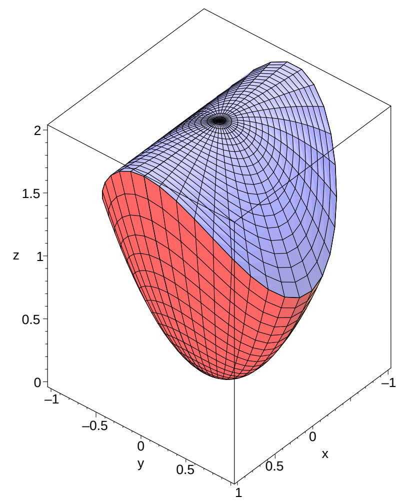
$$x^2 + y^2 = 1$$

Altså vil skjæringskurven til flatene projesert ned på xy-planet være en sirkel med sentrum i origo og radius 1. Innenfor denne sirkelen ser vi at $2 - y^2 \geq 2x^2 + y^2$, så vi kan beregne volumet ved hjelp av integralet

$$V = \iint_A \int_{2x^2+y^2}^{2-y^2} dzdA = \iint_A (2 - 2x^2 - 2y^2)dA = 2\iint_A (1 - x^2 - y^2)dA$$

hvor A er området i xy-planet innenfor sirkelen med sentrum i origo og radius 1. Dersom vi nå går over til polarkoordinater vil vi få integralet

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2)rdrd\theta = 2\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\theta = \pi$$



b) Vi veit at skjæringskurven projisert ned i xy-planet er en sirkel med sentrum i origo og radius 1. Denne kan parameteriseres som $[\cos t, \sin t]$. Vi får da at skjæringskurven kan parametriseres ved $[x, y, z] = [\cos t, \sin t, 2 - \sin^2 t]$. For $t = \pi/4$ får vi punktet $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 3/2)$. Hastighetsvektoren i punktet t er $[-\sin t, \cos t, -2\sin t \cos t]$, som er $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1)$ for $t = \pi/4$. Ved å normalisere denne får vi enhetsvektoren $(-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2})$.

Temperaturforandringen er gitt ved gradienten

$$\nabla T = (\frac{2}{3}x, \frac{2}{3}y, \frac{4}{3}z)$$

som i punktet $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 3/2)$ blir $[\sqrt{2}/3, \sqrt{2}/3, 2]$. Temperaturforandringen i retning $[-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}]$ per lengdeenhet blir dermed

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, 2\right] = -\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

Oppgave 4. Vi starter med å regne ut massen m hvor massetettheten $\delta = \cos\theta$ og vi bruker at $dV = \rho^2 \sin\phi d\rho d\theta d\phi$:

$$m = \iiint_V \delta dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin\theta} \cos\theta \rho^2 \sin\phi d\rho d\theta d\phi =$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} \sin^3\theta \cos\theta \sin\phi d\theta d\phi = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin^4\theta}{12}\right]_0^{\pi/2} \sin\phi d\phi =$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{12} \sin\phi d\phi = \frac{1}{12}$$

Vi kan da regne ut z-koordinaten til tyngdepunktet, hvor vi bruker at z er $\rho\cos\phi$ gitt i kulekoordinater:

$$\overline{z} = \frac{1}{m} \iiint_V z\delta dV = \frac{1}{m} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin\theta} \rho\cos\phi \cos\theta \rho^2 \sin\phi d\rho d\theta d\phi =$$

$$\frac{1}{m} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \sin^4\theta \cos\theta \cos\phi \sin\phi d\theta d\phi = \frac{1}{m} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{20} \cos\phi \sin\phi d\phi =$$

$$\frac{1}{m}\frac{1}{40} = \frac{12}{1}\frac{1}{40} = \frac{3}{10}$$

Oppgave 5.

a) Ved å gjøre om til polarkoordinater får vi at $z = 2 - xy = 2 - r\cos\theta r\sin\theta = 2 - r^2\cos\theta\sin\theta$.

$$V = \iiint_V dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2-r^2\cos\theta\sin\theta} r\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r - r^3\cos\theta\sin\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}(1 - \frac{1}{4}\cos\theta\sin\theta)\,d\theta = 2\pi$$

b) Vi starter med det enkleste; bunnen. Det er en sirkel med sentrum i origo og radius 1, og har derfor areal $A_{\text{bunn}} = \pi$. På veggen er $x^2 + y^2 = r^2 = 1$, så høyden på veggen vil være gitt ved $z = 2 - r^2\cos\theta\sin\theta = 2 - \cos\theta\sin\theta$. Dette gir oss at arealet til veggen er gitt ved integralet

$$A_{\text{vegg}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2-\cos\theta\sin\theta} dz\,d\theta = \int_0^{2\pi}(2 - \cos\theta\sin\theta)\,d\theta = 4\pi$$

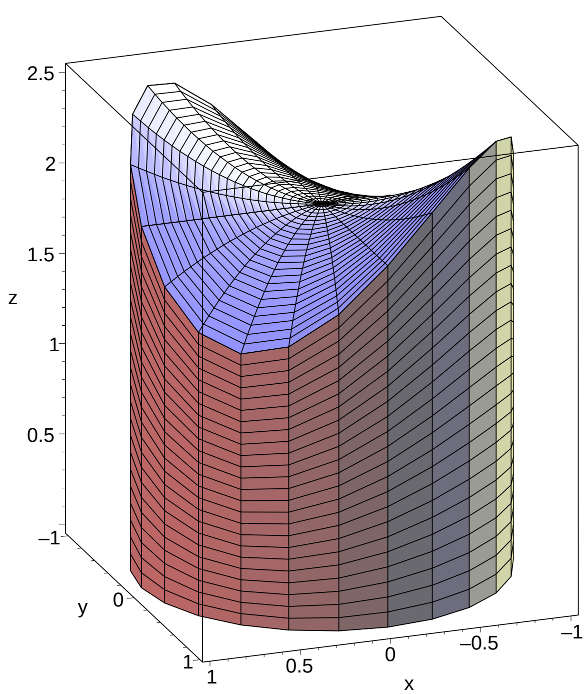
La oss gå over til taket. La $f(x, y) = z = 2 - xy$, da er $f_x = -y$ og $f_y = -x$. Arealet til taket er

$$A_{\text{tak}} = \iint_R dS$$

hvor S er flaten, og R er projeksjonen av S ned i xy-planet. Da blir $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy$, så vi kan regne ut arealet av taket:

$$A_{\text{tak}} = \iint_R dS = \iint_R \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\,r\,dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{(1 + r^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)\,d\theta = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$



Oppgave 6. Vi ser at innenfor området avgrenset av koordinatplanene og $x+2y+z=6$ så er z alltid positiv, så innenfor området er $f(x,y,z)=z$. Vi får dermed integralet

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \int_0^6 \int_0^{3-\frac{z}{2}} \int_0^{6-2y-z} z dx dy dz = \int_0^6 \int_0^{3-\frac{z}{2}} (6z - 2yz - z^2) dy dz =$$

$$\int_0^6 \left[y(6z-z^2) - y^2 z\right]_0^{3-\frac{z}{2}} dz = \int_0^6 \left(2z(3-\frac{z}{2})^2 - z(3-\frac{z}{2})^2\right) dz = \int_0^6 z(3-\frac{z}{2})^2 dz =$$

$$\int_0^6 \left(9z - 3z^2 + \frac{z^3}{4}\right) dz = \left[\frac{9}{2}z^2 - z^3 + \frac{1}{16}z^4\right]_0^6 = 6^2(\frac{9}{2} - 6 + \frac{6^2}{16}) = 3^3$$

$$V = \iiint_T dV = \int_0^6 \int_0^{3-\frac{z}{2}} \int_0^{6-2y-z} dx dy dz = \int_0^6 \int_0^{3-\frac{z}{2}} (6-2y-z) dy dz =$$

$$\int_0^6 \left((6-z)(3-\frac{z}{2}) - (3-\frac{z}{2})^2\right) dz = \int_0^6 (3-\frac{z}{2})^2 dz = \frac{6^2}{2}$$

$$\overline{f} = \frac{1}{V} \iiint_T f(x,y,z) dV = \frac{2}{6^2} 3^3 = \frac{3}{2}$$

Oppgave 7. Vi veit at treghetsmomentet med hensyn på z-aksen er gitt ved funksjonen

$$I_z = \int_C d^2 dm$$

der C er wiren, d er avstanden fra origo, og dm er massen til "en bit av wiren". Kurven C kan parametriseres ved $\mathbf{r}(t) = [\cos^3 t, \sin^3 t]$. Vi har at $dm = kdL = k|\mathbf{r}'(t)|dt$, hvor $\mathbf{r}'(t) = [-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t]$. For $0 \le t \le \pi/2$ får vi at $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t} = 3\cos t \sin t$. Vi kan da regne ut treghetsmomentet:

$$I_z = \int_C d^2 dm = 4\int_0^{\pi/2} (\cos^6 t + \sin^6 t) k 3 \cos t \sin t dt =$$

$$12k \int_0^{\pi/2} \cos^7 t \sin t + \sin^7 t \cos t dt = 12k \left[-\frac{1}{8}\cos^8 t + \frac{1}{8}\sin^8 t\right]_0^{\pi/2} =$$

$$12k \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] = 3k$$