SIF5005 MATEMATIKK 2 VÅR 2003

LØSNINGSFORSLAG HJEMMEØVING 6

Oppgave 1. Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y) = e^x y\mathbf{i} + (e^x + y)\mathbf{j} = \langle P(x,y), Q(x,y)\rangle$ med $P(x,y) = e^x y$ og $Q(x,y) = e^x + y$. Vi ser at

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x,$$

slik at $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ og vektorfeltet er konservativt.

Vi vil finne en potensialfunksjon for vektorfeltet. Det vil si at vi vil finne en funksjon $f(x,y)$ slik at $\mathbf{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$. Vi må altså ha at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x y \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x + y.$$

Ved å integrere finner vi at

$$f(x,y) = \int e^x y \,\mathrm{d}x = e^x y + g(y),$$

hvor $g(y)$ er en funksjon av y. Da er $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + g'(y)$, og ved å sammenligne med vektorfeltet ser vi at $g'(y) = y$ slik at $g(y) = \frac{1}{2}y^2 + C$. Et potensial for $\mathbf{F}$ blir da (med $C = 0$) $f(x,y) = e^x y + \frac{1}{2}y^2$.

For å beregne integralet

$$\int_C e^x y \,\mathrm{d}x + (e^x + y)\,\mathrm{d}y$$

kan vi nå bruke potensialfunksjonen. Kurven C går mellom punktene $(3,0)$ og $(0,3)$. Da blir

$$\int_C e^x y \,\mathrm{d}x + (e^x + y)\,\mathrm{d}y = \int_C \mathbf{F}\,\mathrm{d}s = \int_C \nabla \cdot f \,\mathrm{d}s = f(0,3) - f(3,0) = 3 + \tfrac{9}{2} - 0 = \tfrac{15}{2}.$$

Oppgave 2. Vi vil beregne

$$\oint_C -y^3\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y$$

hvor C er ett omløp i positiv retning av sirkelen med sentrum i origo og radius a. Siden $\frac{\partial}{\partial y}(-y^3) = -3y^2$ og $\frac{\partial}{\partial x}(x^3) = 3x^2$ gir Greens teorem oss at

$$\oint_C -y^3\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y = \iint_D 3x^2 + 3y^2\,\mathrm{d}A,$$

hvor D er disken med sentrum i origo og radius a. Ved å innføre polarkoordinater finner vi

$$\oint_C -y^3\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y = 3\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 3\cdot 2\pi\cdot \tfrac{1}{4}a^4 = \tfrac{3\pi}{2}a^4.$$

Oppgave 3. Vi skriver først om til sylinderkoordinater. Da vil vi beregne

$$\iint_S z\,\mathrm{d}S,$$

hvor S er den delen av flaten $z = \sqrt{1 + r^2}$ som ligger innenfor sylinderen $r = 2$. I sylinderkoordinater er

$$\mathrm{d}S = \sqrt{r^2 + (r\frac{\partial z}{\partial r})^2 + (\frac{\partial z}{\partial \theta})^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

slik at

$$\iint_S z\,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{1+r^2}\sqrt{r^2 + r^2\tfrac{r^2}{1+r^2} + 0}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\sqrt{1+2r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_1^9 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\tfrac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^9\mathrm{d}\theta = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} 27-1\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{6}\cdot 26\cdot 2\pi = \frac{26\pi}{3}.$$

Oppgave 4. Vi vil finne

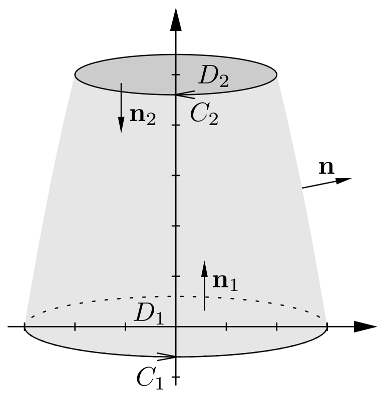
$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S,$$

når S er den delen av paraboloiden $z = 9 - x^2 - y^2$ som er avgrenset av planene $z = 0$ og $z = 5$. Denne er vist i Figur 1. $\mathbf{n}$ er normalvektoren til S med positiv $\mathbf{k}$-komponent, mens

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 2y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + (2z+1)\mathbf{k}.$$

Randkurvene til flaten vil være to sirkler, C_1 som ligger i planet $z = 0$ og C_2 i planet $z = 5$. Stokes teorem gir da

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \oint_{C_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s + \oint_{C_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s.$$



Figur 1

For å finne orienteringene på randkurvene tenker vi oss at går langs kurvene med kroppen i retning av normalvektoren. Vi skal da gå i en slik retning at vi har området vårt på venstre side. Dette gir orienteringen vist på figuren.

For å beregne kurveintegralene kan vi bruke Stokes teorem en gang til, men tenker nå på de plane sirklene som render for diskene D_1 og D_2. For D_1 er $\mathbf{n}_1 = \mathbf{k}$, slik at $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1 = \frac{\partial}{\partial x}(-x\cdot 0) - \frac{\partial}{\partial y}(2y) = -2$, mens normalvektoren på D_2 er $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{k}$ som gir $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2 = -\frac{\partial}{\partial x}(-x\cdot 5) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) = 7$. Siden curlen er konstant trenger vi bare å gange den med arealet av diskene. Dermed blir $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = -2\cdot\pi\cdot 3^2 + 7\cdot\pi\cdot 2^2 = 10\pi$.

Oppgave 5. Vi vil skrive om $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ ved å innføre polarkoordinater. Vi skriver først om uttrykket til vektorform. Med $\mathbf{F} = \langle P, Q\rangle$ er

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}t = \langle P, Q\rangle\cdot\left\langle \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\rangle\mathrm{d}t.$$

Vi har at $x = x(r,\theta) = r\cos\theta$ og $y = y(r,\theta) = r\sin\theta$, og ved å bruke kjerneregelen blir

$$\begin{aligned} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y &= \langle P, Q\rangle \cdot \left\langle \tfrac{\partial x}{\partial r}\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \tfrac{\partial x}{\partial \theta}\tfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \tfrac{\partial y}{\partial r}\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \tfrac{\partial y}{\partial \theta}\tfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \right\rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \left((\cos\theta\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} - r\sin\theta\tfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})P + (\sin\theta\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + r\cos\theta\tfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})Q\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \left((P\cos\theta + Q\sin\theta)\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + (-P\sin\theta + Q\cos\theta)\tfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \langle P\cos\theta + Q\sin\theta, (-P\sin\theta + Q\cos\theta)\,r\rangle \cdot \left\langle \tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \tfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right\rangle\,\mathrm{d}t \\ &= (P\cos\theta + Q\sin\theta)\,\mathrm{d}r + (-P\sin\theta + Q\cos\theta)\,r\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Alternativt kan vi regne direkte med differensialer. Siden differensialene til $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$ er

$$\mathrm{d}x = \cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \qquad \mathrm{d}y = \sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

blir

$$\begin{aligned} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y &= (\cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)P + (\sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta)Q \\ &= (P\cos\theta + Q\sin\theta)\,\mathrm{d}r + (-P\sin\theta + Q\cos\theta)\,r\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Vi kan nå bruke denne formelen for å skrive om

$$A = \frac{1}{2}\oint_C -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

til polarkoordinater. Her er $P = -y = -r\sin\theta$ og $Q = x = r\cos\theta$, som gir

$$A = \frac{1}{2}\oint_C (-r\sin\theta\cos\theta + r\cos\theta\sin\theta)\,\mathrm{d}r + (r\sin^2\theta + r\cos^2\theta)r\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\oint_C r^2\,\mathrm{d}\theta.$$

I Matematikk 1 brukte vi formelen $A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[f(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$ for areal i polarkoordinater, hvor $r = f(\theta)$. Som vi kunne forvente er dette samme formel.

Vi har allerede funnet at $-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = r^2\,\mathrm{d}\theta$, slik at

$$I = \oint_C \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \oint_C \frac{r^2\,\mathrm{d}\theta}{r^2} = \oint_C \mathrm{d}\theta.$$

La nå

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \text{og} \qquad Q = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Da blir

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{og tilsvarende} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dersom C er en sirkel med sentrum i origo og radius a ser vi at $I = 2\pi$. I følge Greens teorem eller teoremet om konservative vektorfelt ville vi forventet at $I = 0$. Problemet i dette tilfellet er at vektorfeltet ikke er kontinuerlig i origo, som vi integrerer rundt.

Oppgave 6. Vi er gitt vektorfeltet $\mathbf{F} = u\nabla v - v\nabla u$. I følge Greens teorem på vektorform er

$$\iint_R \nabla\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}A = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s.$$

Vi finner videre ved produktregelen for derivasjon på gradientform,

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \nabla\cdot(u\nabla v - v\nabla u) = u\nabla^2 v + \nabla u\cdot\nabla v - v\nabla^2 u - \nabla v\cdot\nabla u = u\nabla^2 v - v\nabla^2 u$$

og siden $\frac{\partial v}{\partial n} = \mathbf{n}\cdot\nabla v$ er

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot(u\nabla v - v\nabla u) = u(\mathbf{n}\cdot\nabla v) - v(\mathbf{n}\cdot\nabla u) = u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Dermed blir

$$\iint_R (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,\mathrm{d}A = \oint_C \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,\mathrm{d}s. \tag{1}$$

Dersom v er konstantfunksjonen $v = 1$, vil de deriverte til v være 0. Spesielt er $\nabla^2 v = 0$ og $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$. Sammen med formelen ovenfor gir dette

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\, \mathrm{d}s = -\oint_C \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}s = -\iint_R (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\, \mathrm{d}A = \iint_R \nabla^2 u\, \mathrm{d}A,$$

slik at når $\nabla^2 u = 0$ er $\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\, \mathrm{d}s = 0$.

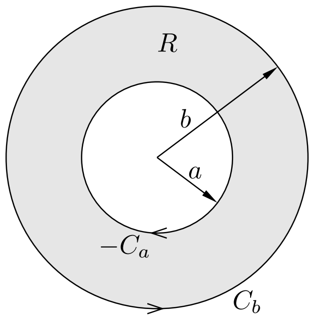
Vi lar nå $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Ved å derivere ser vi at for $(x, y) \neq (0, 0)$ er

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

og

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Dermed blir $\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ slik at v er harmonisk.



Figur 2

Gitt $0 < a < b$, og u som er harmonisk på disken med radius b. La R være annulusen som vist i Figur 2. Siden både $\nabla^2 u = 0$ og $\nabla^2 v = 0$ gir ligning (1) oss

$$0 = \iint_R (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\, \mathrm{d}A = \oint_{C_b} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}s - \oint_{C_a} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}s.$$

C_a og C_b er sirklene med radius henholdsvis a og b gjennomløpt i positiv retning. Vi får negativt fortegn foran det andre integralet fordi sirkelen med radius a egentlig skulle vært orientert motsatt vei. La oss se litt nærmere på v. I polarkoordinater er $v = v(r, \theta) = \ln r^2 = 2\ln r$. Spesielt betyr det at v er konstant på alle sirkler om origo. Den normalderiverte til v blir

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla v = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \langle x, y \rangle \cdot \left\langle \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2}{r},$$

siden normalvektoren til en sirkel er $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \langle x, y \rangle$. Ved å sette inn i ligningen vår finner vi da

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial v}{\partial n}\bigg|_{r=b} \right) \left(\oint_{C_b} u\, \mathrm{d}s \right) - \left(v \oint_{C_b} \frac{\partial u}{\partial n}\, \mathrm{d}s \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial n}\bigg|_{r=a} \right) \left(\oint_{C_a} u\, \mathrm{d}s \right) + \left(v \oint_{C_a} \frac{\partial u}{\partial n}\, \mathrm{d}s \right) \\ &= \frac{2}{b} \oint_{C_b} u\, \mathrm{d}s - \frac{2}{a} \oint_{C_a} u\, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

hvor vi har brukt at $\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\, \mathrm{d}s = 0$. Ved å dele på 4π finner vi

$$\frac{1}{2\pi a} \oint_{C_a} u\, \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi b} \oint_{C_b} u\, \mathrm{d}s,$$

som sier at u har samme middelverdi på de to sirklene.