Stabilitet og bifurkasjon: To eksempler fra Logan

Utdraget fra Logan i kompendiet inneholder to eksempler (perle på en roterende ring og slimsopp) hvor forfatteren unnlater å ikkedimensjonalisere problemet. Her skal jeg vise hvordan analysen ser ut på ikkedimensjonal form. Beskrivelsen her er ikke komplett! Se Logan for detaljene.

Perle på en roterende ring. Modellen kan skrives

$$mR\frac{d^2\theta}{dt^{*2}} = -mg\sin\theta + mR\omega^2\sin\theta\cos\theta.$$

Med samme skalering av tidsvariabelen som i analysen av pendelen:

$$t^* = \sqrt{\frac{R}{g}}t \qquad \text{og med } \mu = \frac{R\omega^2}{g}$$

havner ligningen på formen

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = \mu\sin\theta\cos\theta.$$

Likevekt fordrer $\ddot{\theta} = 0$, altså enten $\sin\theta = 0$ eller $\mu\cos\theta = 1$. Det siste er selvsagt kun mulig når $\mu \geq 1$. Bifurkasjonsdiagrammet blir omtrent som Logans figur 6.8, med μ på den horisontale aksen og skjæringspunktet i $\mu = 1$.

Lineariseringen av ligningen rundt likevektspunktet $\theta = 0$ blir

$$\ddot{\tilde{\theta}} + (1-\mu)\tilde{\theta} = 0.$$

Denne er stabil presis når $1 - \mu > 0$, altså $\mu < 1$.

Lineariseringen rundt et likevektspunkt $\theta = \theta_0$ der $\mu\cos\theta_0 = 1$ blir etter litt regning

$$\ddot{\tilde{\theta}} + \frac{\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}\tilde{\theta} = 0$$

som alltid er stabilt fordi koeffisienten foran $\tilde{\theta}$ er positiv.

Slimsopp. Den uskalerte modellen kan skrives

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a^*}{\partial t^*} &= k\frac{\partial^2 a^*}{\partial x^{*2}} - l\frac{\partial}{\partial x^*}\Big(a^*\frac{\partial c^*}{\partial x^*}\Big),\\
\frac{\partial c^*}{\partial t^*} &= D\frac{\partial^2 c^*}{\partial x^{*2}} + q_1 a^* - q_2 c^*.
\end{aligned}$$

Vi kan skalere fire variable: a^*, c^*, x^* og t^*, mens ligningene over har fem koeffisienter. En dimensjonsløs kombinasjon av de fem koeffisientene kommer vi ikke utenom, men resten kan skaleres bort, for eksempel med

$$a^* = \frac{q_2 k}{q_1 l}a, \quad c^* = \frac{k}{l}c, \quad x^* = \sqrt{\frac{k}{q_2}} \quad t^* = \frac{1}{q_2}t$$

som gir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(a\frac{\partial c}{\partial x}\Big),\\
\frac{\partial c}{\partial t} &= \delta\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + a - c.
\end{aligned}$$

En likevektsløsning er gitt ved $a = c = a_0$ (konstant). Linearisering rundt denne leder til

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde{a}}{\partial t} &= \frac{\partial^2\tilde{a}}{\partial x^2} - a_0\frac{\partial^2\tilde{c}}{\partial x^2},\\
\frac{\partial\tilde{c}}{\partial t} &= \delta\frac{\partial^2\tilde{c}}{\partial x^2} + \tilde{a} - \tilde{c}.
\end{aligned}$$

Vi søker en løsning på formen

$$\tilde{a} = a_1 e^{\alpha t + i\beta x}, \quad \tilde{c} = c_1 e^{\alpha t + i\beta x}$$

som leder til

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta^2 & -a_0\beta^2 \\ 1 & -1 - \alpha - \delta\beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som har ikketrivielle løsninger når determinanten er null:

$$\alpha^2 + (1 + \delta\beta^2 + \beta^2)\alpha + \beta^2 + \delta\beta^4 - a_0\beta^2$$

Røttene α_1 og α_2 oppfyller

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -(1 + \delta\beta^2 + \beta^2) < 0,$$
$$\alpha_1\alpha_2 = \beta^2 + \delta\beta^4 - a_0\beta^2.$$

Hvis røttene er komplekse er de komplekskonjugerte av hverandre, og har da begge negativ realdel ved den første ligningen, så vi har stabilitet. Hvis røttene er reelle med $\alpha_1\alpha_2 > 0$ er begge negative, så vi har stabilitet. Dermed har vi instabilitet presis når $\alpha_1\alpha_2 < 0$, altså når

$$1 + \delta\beta^2 < a_0.$$

Dette krever $a_0 > 1$, og skjer da for små β, det vil si store bølgelengder.